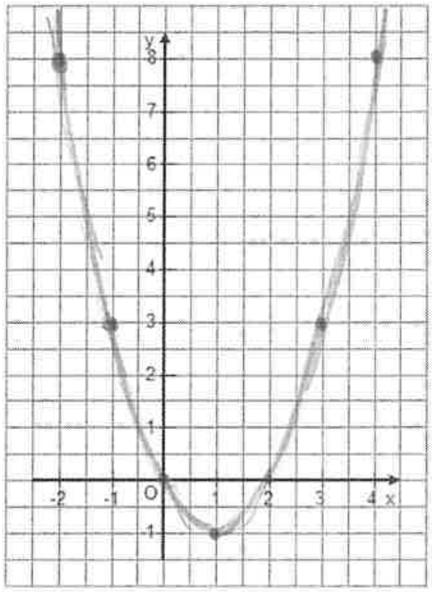
1. Funktionen allgemein

a) Ergänze die Wertetabelle und zeichne den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 - 2x$!

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	8	3	0	-1	0	3	8



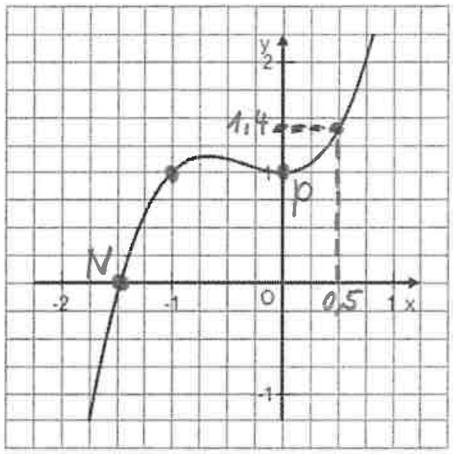
b) Lies aus dem gegebenen Graphen der Funktion g die gesuchten Werte so genau wie möglich ab!

$g(0{,}5) =$ 1,4

Alle Stellen mit $g(x) = 1$: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$

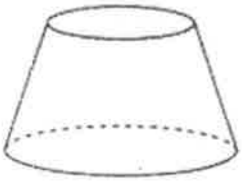
Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

mit der x-Achse N(-1,5/0)
mit der y-Achse P(0/1)



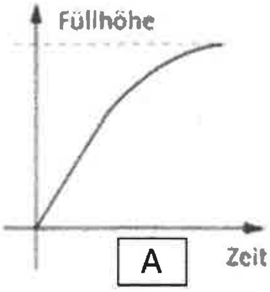
c) Die abgebildeten Gefäße werden gleichmäßig mit Wasser gefüllt. Die Graphen zeigen jeweils die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit. Ordne jedem Gefäß einen Graphen zu!

1 ≙ C



2 ≙ B

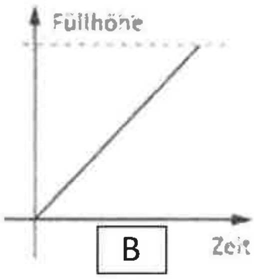
3 ≙ A



A

≙ 3

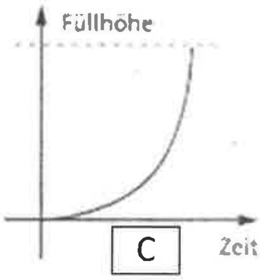
zuerst gleichmäßiger Anstieg, dann abnehmend



B

≙ 2

gleichmäßiger Anstieg



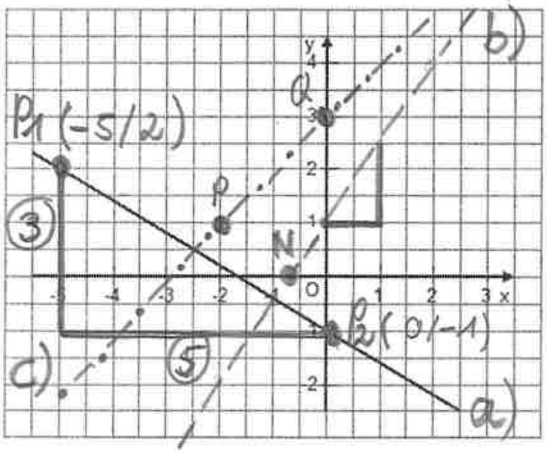
C

≙ 1

zunehmender Anstieg

2. Lineare Funktionen und direkte Proportionalität

a) Gegeben ist der Graph der Funktion f. Bestimme mit Hilfe der Abbildung die Funktionsgleichung der Geraden!



$f(x) = -\frac{3}{5}x - 1$ y-Achsenabschnitt

fallend

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{0-(-5)} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$

Steigung, y-Achsenabschnitt

b) Zeichne den Graphen der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 1{,}5x + 1$ in das Koordinatensystem von a) ein und bestimme rechnerisch die Nullstelle der Funktion g!

$1{,}5x + 1 = 0 \;|-1$; $1{,}5x = -1 \;|:1{,}5$; $x = \frac{-1}{1{,}5} = -\frac{2}{3}$; $N(-\frac{2}{3}|0)$

c) Bestimme den Funktionsterm der Funktion h, deren Graph durch die Punkte P(-2/1) und Q(0/3) geht und zeichne den Graphen der Funktion h ebenfalls in das Koordinatensystem von a) ein!

$m = \frac{3-1}{0-(-2)} = \frac{2}{2} = 1$; $f(x) = x + 3$ y-Achsenabschnitt

d) Gegeben sind die Geraden f und g mit den Geradengleichungen f: y = 2x + 1 und g: y = x + 3. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden! Arbeite mit dem Gleichsetzungsverfahren!

$f = g$

$2x + 1 = x + 3 \;|-1$

$2x \underbrace{+1-1}_{0} = x + \underbrace{3-1}_{2}$

$2x = x + 2 \;|-x$

$2x - x = x + 2 - x$

$x = 2$

y-Wert des Schnittpunkts:

g(2) oder f(2)

g(2) = 2+3 = 5 (einfacher!)

S(2/5)

e) Bestätige, dass die durch die Tabelle gegebene Zuordnung direkt proportional sein kann!
Ergänze die Tabelle entsprechend und gib die Abbildungsvorschrift an!
Beschreibe, wie der Graph einer direkten Proportionalität aussieht!

·(-1) ·20

x	–4	–1	1	12	20
y	-0,5	-0,125	0,125	1,5	2,5

·(-1) ·20

$y = m \cdot x \;|:x$; $\frac{y}{x} = m$

$\frac{-0{,}5}{-4} = \frac{1}{8}$; $\frac{-0{,}125}{-1} = \frac{1}{8}$; $\frac{1{,}5}{12} = \frac{1}{8}$

Graph: Ursprungsgerade

$x \mapsto \frac{1}{8}x$ oder $y = \frac{1}{8}x$

3. Ungleichungen graphisch und rechnerisch lösen, Intervallschreibweise bei der Grundmenge $\mathbb{Q}$

Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichungen wenn möglich in Intervallschreibweise!

$3x < 2x - 4 \quad | -2x$

$x < -4$

$L =]-\infty; -4[$

$2x - 3 < 4x + 3 \quad | -2x$

$-3 < 2x + 3 \quad | -3$

$-6 < 2x \quad | :2$

$-3 < x$

$L =]-3; \infty[$

$4x + 1 > 4x + 2 \quad | -4x$

$1 > 2$ ↯ Widerspruch

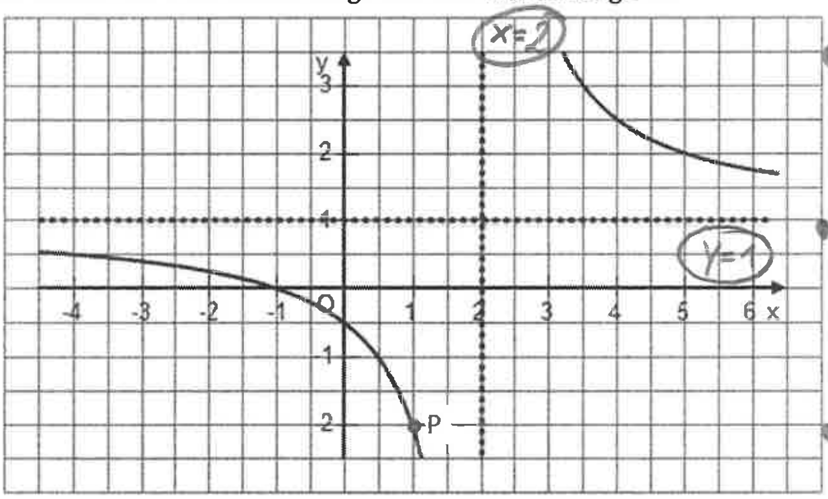
$L = \{\}$ leere Menge

4. Gebrochen rationale Funktion und indirekte Proportionalität

$D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

$W = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

a) Gegeben ist der Graph der gebrochen rationalen Funktion f mit den zugehörigen Asymptoten. Der Graph verläuft durch den Punkt P(1/–2). Der Funktionsterm hat die Form $\frac{a}{x+b} + c$.
Bestimme a, b und c so, dass der Funktionsterm zum Graphen passt!
Gib zudem die Definitionsmenge und die Wertemenge an!



- senkrechte Asymptote $x = 2$
Definitionslücke bei $x = 2$
$\Rightarrow b = -2$
- waagrechte Asymptote $y = 1$
$\Rightarrow c = 1$

$f(x) = \frac{a}{x-2} + 1$

- $P(1|-2) \Rightarrow \frac{a}{1-2} + 1 = -2$
einsetzen
$\Rightarrow a = 3$

b) Beschreibe, wie der Graph der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ aus dem Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{x}$ hervorgeht!
Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von g mit den Koordinatenachsen und die Gleichungen der Asymptoten!

- $b = 3 \Rightarrow$ Verschiebung um 3 nach links!
$a = 2 \Rightarrow$ Streckung in y-Richtung um 2
$c = -1 \Rightarrow$ Verschiebung um 1 nach unten
- senkrechte Asymptote $x = -3$ und waagrechte Asymptote $y = -1$
- Schnittpunkt mit x-Achse:

$g(x) = 0$; $\frac{2}{x+3} - 1 = 0 \quad | +1$;

$\frac{2}{x+3} = 1 \quad | \cdot (x+3)$; $2 = 1 \cdot (x+3)$;

$2 = x + 3 \quad | -3$; $x = -1$; $N(-1|0)$

Schnittpunkt mit y-Achse:

$g(0) = \frac{2}{0+3} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

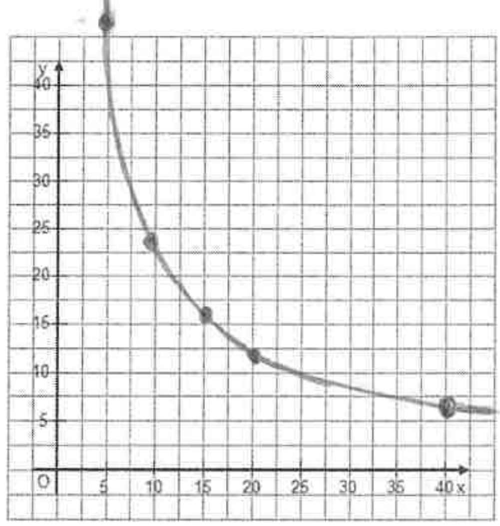
$P(0|-\frac{1}{3})$

c) Bestätige, dass die durch die Tabelle gegebene Zuordnung indirekt proportional sein kann!
Ergänze die Tabelle entsprechend und gib die Abbildungsvorschrift an! Zeichne den Graphen!

$\cdot 2$ $\cdot 3$

x	5	10	15	20	40
y	48	24	16	12	6

$:2$ $:3$



$y = \frac{a}{x}$; $y \cdot x = a$

$5 \cdot 48 = 240$; $20 \cdot 12 = 240$; $40 \cdot 6 = 240$

5. Bruchterme (addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren), Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligem Exponenten, Bruchgleichungen lösen

a) Berechne!

$\frac{x}{x+1} + \frac{-2}{x-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{-2\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - x - 2x - 2}{x^2-1} = \frac{x^2-3x-2}{x^2-1}$

$\frac{2}{x+2} - 1 = \frac{2}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} = \frac{2-(x+2)}{x+2} = \frac{2-x-2}{x+2} = \frac{-x}{x+2}$

$\frac{3x}{x+1} \cdot \frac{3x+3}{x} = \frac{3\cdot x}{x+1} \cdot \frac{3(x+1)}{x} = \frac{3\cdot 3}{1} = 9$ (über Kreuz kürzen!)

$\frac{6x^2}{x-3} : \frac{2x}{x+2} = \frac{6x^2}{x-3} \cdot \frac{x+2}{2x} = \frac{3x\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot 1} = \frac{3x^2+6x}{x-3}$

b) Fasse zusammen!

$a^4 \cdot a^7 = a^{4+7} = a^{11}$

$c^2 : c^{-5} = c^{2-(-5)} = c^7$

$b^4 \cdot b^{-5} = b^{4+(-5)} = b^{-1} = \frac{1}{b}$

$(x^{-3})^{-2} = x^{(-3)\cdot(-2)} = x^6$

c) Bestimme jeweils die Definitionsmenge der Bruchgleichung!
Löse sie anschließend durch über Kreuz multiplizieren oder Hauptnenner bilden!

$\frac{2}{x+1} = 3 \quad | \cdot(x+1)$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$2 = 3\cdot(x+1)$

$2 = 3x + 3 \quad | -3$

$-1 = 3x \quad | :3$

$-\frac{1}{3} = x$; $L = \{-\frac{1}{3}\}$

$\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x} \quad | \cdot(x-3) \quad | \cdot x$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$

$2\cdot x = 3\cdot(x-3)$

$2x = 3x - 9 \quad | -2x$

$0 = x - 9 \quad | +9$

$9 = x$; $L = \{9\}$

$\frac{x+4}{x} = \frac{x-8}{x-4}$ $\Big|\cdot x \;\; \cdot(x-4)$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;4\}$

$(x+4)(x-4) = (x-8)\cdot x$

$x^2 - 16 = x^2 - 8x \quad | -x^2$

$-16 = -8x \quad | :(-8)$

$2 = x$; $L = \{2\}$

$\frac{17}{5x} - \frac{3}{x} = 4$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{17}{5x} - \frac{3\cdot 5}{x\cdot 5} = 4$

$\frac{17-15}{5x} = 4 \quad | \cdot 5x$

$2 = 4\cdot 5x \quad | :20$; $\frac{2}{20} = x$; $\frac{1}{10} = x$

$L = \{\frac{1}{10}\}$

6. Linearer Gleichungssysteme, Einsetzverfahren und Additionsverfahren

a) Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren!

I) $-5x + y = -3$; $y = -3 + 5x$

II) $3x - 7 = -2y$

I) in II) $3x - 7 = -2(-3 + 5x)$

$3x - 7 = 6 - 10x \quad | +10x$

$13x - 7 = 6 \quad | +7$

$13x = 13 \quad | :13$

$x = 1$

x in I) da schon nach y aufgelöst

$y = -3 + 5\cdot 1$

$y = 2$

$L = \{(1|2)\}$

b) Löse die linearen Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren!

I) $4x - 2y = 5$

II) $3x + 2y = 9$

I)+II) $7x = 14 \quad | :7$

$x = 2$

x in II) $3\cdot 2 + 2y = 9 \quad | -6$

$2y = 3 \quad | :2$

$y = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$L = \{(2; 1{,}5)\}$

I) $5x + 6y = 11$

II) $2x + 2y = 6 \quad | \cdot 3$

3·II)−I) $x = 7$

x in II) $2\cdot 7 + 2y = 6 \quad | -14$

$2y = -8 \quad | :2$

$y = -4$

$L = \{(5; -4)\}$

I) $2x + 4Y = 10 \quad | \cdot 3$

II) $3x + 3y = 9 \quad | \cdot 2$

3·I) $6x + 12y = 30$ III)

2·II) $6x + 6y = 18$ IV)

III)−IV) $6y = 12 \quad | :6$

$y = 2$

y in II) $3x + 3\cdot 2 = 9 \quad | -6$

$3x = 3 \quad | :3$

$x = 1$

$L = \{(1; 2)\}$

c) Löse die linearen Gleichungssysteme und gib jeweils die Lösungsmenge an!

I) $y = 3x + 8$

II) $y = 3x - 8$

I)−II) $0 = 16$ ↯

Widerspruch

$L = \{\}$

I) $2y = 6x - 16$

II) $y = 3x - 8 \quad | \cdot 2$

I)−2·II) $0 = 0$

Es gibt unendlich viele Lösungen mit dem Zusammenhang

$y = 3x - 8 \Rightarrow (0;-8), (1;-5), (2;-2) \ldots$

$L = \{(x; 3x-8) \,/\, x \in \mathbb{Q}\}$ mögliche Schreibweise

7. Zufallsexperimente, Laplace-Experimente

a) Sabine würfelt einmal mit einem normalen Würfel und notiert die gewürfelte Augenzahl.

Gib die Ergebnismenge und deren Mächtigkeit an!

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $|\Omega| = 6$

Notiere die Ereignisse in Mengenschreibweise und gib die Gegenereignisse in Wortform an!

A: Augenzahl mindestens vier; $A = \{4, 5, 6\}$

$\bar{A}$: Augenzahl höchstens drei

B: Augenzahl weniger als drei; $B = \{1, 2\}$

$\bar{B}$: Augenzahl mehr als zwei

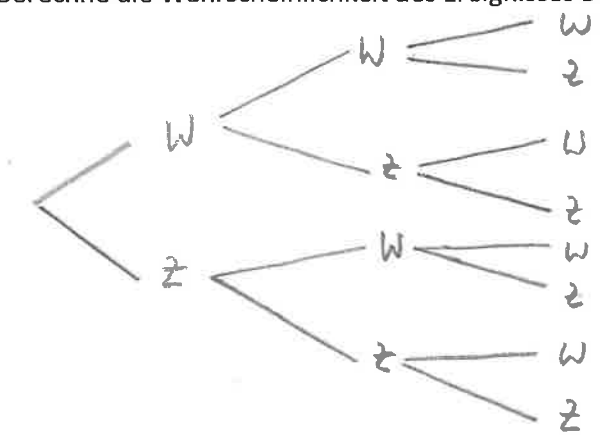
C: Augenzahl ist Quadratzahl ; $C = \{1; 4\}$

$\bar{C}$: Augenzahl ist keine Quadratzahl

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C mit Hilfe der Laplace-Formel $P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$!

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$ $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33,\bar{3}\%$ $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33,\bar{3}\%$

c) Eine Münze mit Wappenseite und Zahlseite wird dreimal hintereinander geworfen. ⇒ W, Z
Erstelle ein Baumdiagramm und notiere die Ergebnismenge!
Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D: genau zweimal Wappen!



$D = \{WWZ; WZW; ZWW\}$

$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{3}{8} = 0,375$
$= 37,5\%$

$\Omega = \{WWW; WWZ; WZW; WZZ; ZWW; ZWZ; ZZW; ZZZ\}$

d) Tabellenkalkulationsprogramm Excel

Trage die Formeln für die Berechnung der schriftlichen Durchschnittsnoten mi t relativen Bezügen ein!

	A	B	C	D
1		1.SA	2.SA	Durchschnitt schriftl.
2	Mathe	2	3	
3	Englisch	2	4	
4	Deutsch	1	3	

D2: = (B2 + C2) / 2
D3: = (B3 + C3) / 2
D4:= (B4 + C4) / 2

Trage die Formeln für die Berechnung der Bruttowerte mit relativen und absoluten Bezügen ein.

	A	B	C
1	**Multiplikationsfaktor für Brutto:**		
2	1,19		
3	**Nettowert**	**Bruttowert**	
4	125,00		
5	369,00		
6	1389,00		
7			

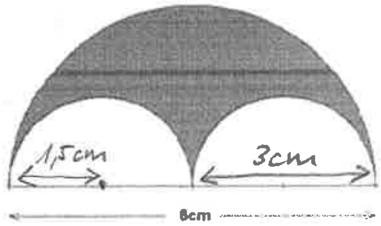
B4: = A4 * A2
B5: = A5 * A2
B6:= A6 * A2

8. Umfang und Flächeninhalt vom Kreis, gerades Prisma und gerader Kreiszylinder (Schrägbild, Oberflächeninhalt, Volumen)

a) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der grau gefärbten Figur!

K ≙ Kreis, HK ≙ Halbkreis

$U_K = 2r\pi$
$(= 2\pi r)$



$A_K = r^2\pi$
$(= \pi r^2)$

$U = 2 \cdot U_{HK\,klein} + U_{HK\,groß}$
$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1{,}5\,cm \cdot \pi) + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3\,cm) \cdot \pi$
$= 3\pi\,cm + 3\pi\,cm = 6\pi\,cm$
$\approx \underline{\underline{18{,}85\,cm}}$

$A = A_{HK\,groß} - 2 \cdot A_{HK\,klein}$
$= \frac{1}{2} \cdot (3\,cm)^2 \cdot \pi - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1{,}5\,cm)^2\pi$
$= 4{,}5\pi\,cm^2 - 2{,}25\pi\,cm^2$
$= 2{,}25\pi\,cm^2 \approx \underline{\underline{7{,}07\,cm^2}}$

b) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius r = 2 cm und der Höhe h = 5cm!

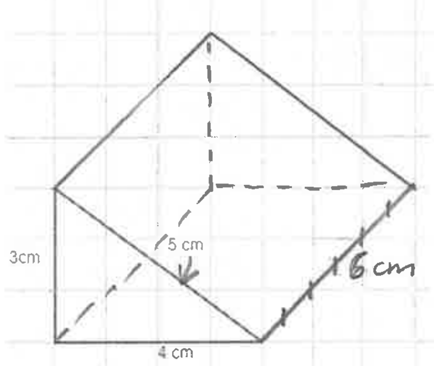
$O_Z = M + 2 \cdot G$
$= 2r\pi \cdot h + 2 \cdot r^2\pi$
$= 2 \cdot 2\,cm \cdot \pi \cdot 5\,cm + 2 \cdot (2\,cm)^2\pi$
$= 20\pi\,cm^2 + 8\pi\,cm^2$
$= 28\pi\,cm^2 \approx \underline{87{,}96\,cm^2}$

$V_Z = G \cdot h$
$= r^2\pi \cdot h$
$= (2\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 5\,cm$
$= 20\pi\,cm^3 \approx \underline{\underline{62{,}83\,cm^3}}$

c) Gegeben ist ein gerades Prisma mit der Höhe h = 6 cm und der in der Abbildung dargestellten Grundfläche.
Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas!
Ergänze die Zeichnung zum Schrägbild des Prismas, wobei das Prisma auf einer Seitenfläche liegt!

Volumen:

$V_P = G \cdot h$
$= \frac{1}{2} \cdot (3\,cm \cdot 4\,cm) \cdot 6\,cm$
$= \frac{1}{2} \cdot 12\,cm^2 \cdot 6\,cm$
$= \underline{\underline{36\,cm^3}}$



Oberflächeninhalt:

$O_P = 2 \cdot G + A_{Seitenflächen}$
$= 2 \cdot \frac{1}{2}(3\,cm \cdot 4\,cm) + (3\,cm + 4\,cm + 5\,cm) \cdot 6\,cm$
$= 12\,cm^2 + 12\,cm \cdot 6\,cm$
$= 12\,cm^2 + 72\,cm^2 = \underline{\underline{84\,cm^2}}$